UFCG – Universidade Federal de Campina Grande
CEEI – Centro de Engenharia Elétrica e Informática
DEE – Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Princípios de Comunicações
Professor: Waslon Terllizzie Araújo Lopes

1ª Lista de Exercícios: Semestre 2013.1

1. Dado o sinal $g(t)$ ilustrado na Figura 1, esboce os gráficos dos sinais $g(t+2)$, $g(-t+2)$, $g(-t-2)$, $g(t/2)$ e $g(t)/2$.

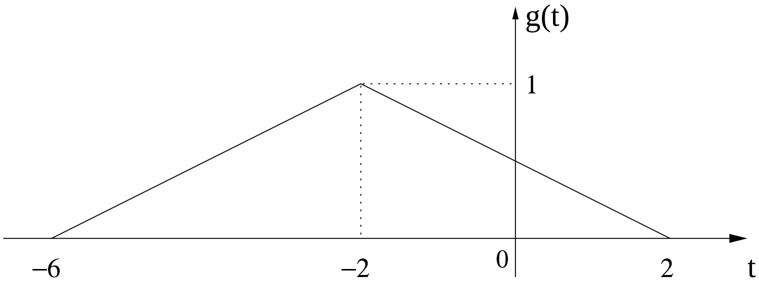

Figura 1: Sinal da Questão 1.

2. Determine a potência e o valor eficaz dos sinais abaixo:
   (a) $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta)$;
   (b) $x(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$.

3. Um sinal real $g(t)$ pode ser aproximado em termos de outro sinal real $x(t)$ num intervalo $[t_1, t_2]$ pela seguinte expresssão:
$$g(t) \simeq c\,x(t), \qquad t_1 \le t \le t_2.$$
Nesse caso, o erro na aproximação $e(t)$ é dado por
$$e(t) = \begin{cases} g(t) - c\,x(t), & t_1 \le t \le t_2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
   (a) Mostre que a energia do erro é minimizada quando
$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt} = \frac{1}{E_x}\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt.$$
   (b) Use o resultado anterior para determinar o valor da constante c quando o sinal
$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ -1, & \pi \le t \le 2\pi, \end{cases}$$
é aproximado em termos de $\text{sen}(t)$, *i.e.*, $g(t) \simeq c\,\text{sen}(t)$.

4. Considere o sinal
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ -1, & \pi \le t \le 2\pi, \end{cases}$$
que é aproximado por $\tilde{x}(t) = \frac{4}{\pi}\text{sen}(t)$, no intervalo considerado.

(a) Mostre que o erro é ortogonal à função $\tilde{x}(t)$.

(b) Mostre que a energia de $x(t)$ é a soma da energia do sinal de erro com a do sinal $\tilde{x}(t)$.

5. Determine a constante, A tal que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sejam ortogonais para todo t, em que: $f_1(t) = e^{-|t|}$ e $f_2(t) = 1 - Ae^{-2|t|}$.

6. Dado o conjunto de funções $f_n(t)$, como ilustrado na Figura 2, mostre que

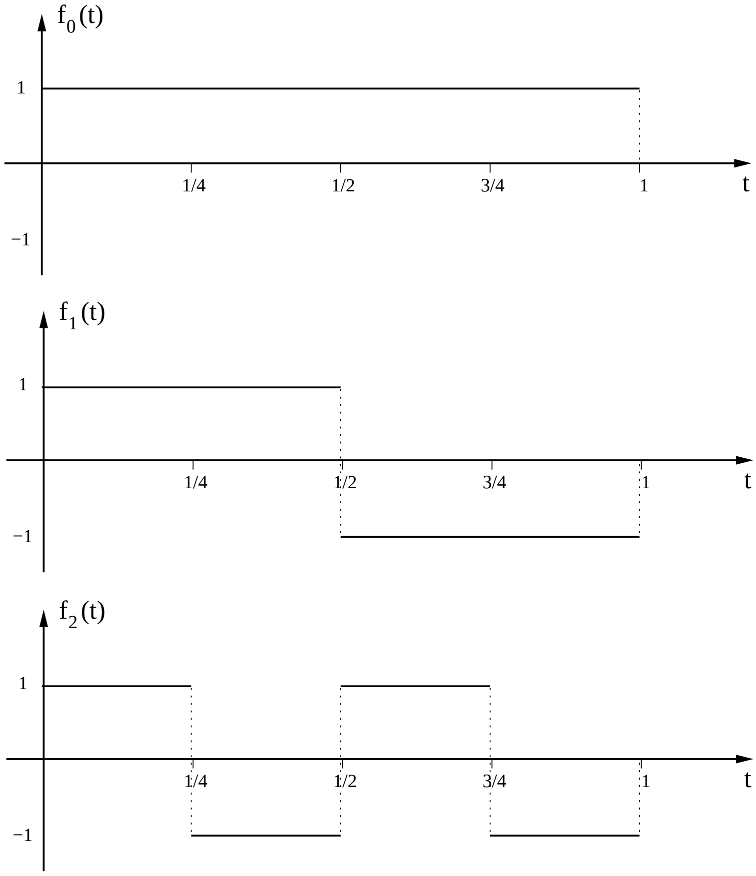

Figura 2: Conjunto de funções ortogonais.

(a) Este conjunto de funções forma um conjunto ortogonal no intervalo (0,1). O conjunto é ortonormal?

(b) Represente um dado sinal $f(t) = 2t$ no intervalo (0,1), usando este conjunto de funções ortogonais.

(c) Esboce a função $f(t)$ e sua representação no mesmo gráfico.

(d) Determine a energia do sinal de erro após a aproximação.

7. Represente as funções da Figura 3 utilizando o degrau unitário.

8. Determine a potência e o valor eficaz dos seguintes sinais:

(a) $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta)$;

(b) $x(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$;

9. Considerando que a tensão $x(t) = \text{sen}(\pi t)$ é aplicada à entrada do circuito retificador da Figura 4, determine os coeficientes (a_0, a_n e b_n) da Série Trigonométrica de Fourier da tensão de saída $y(t)$.

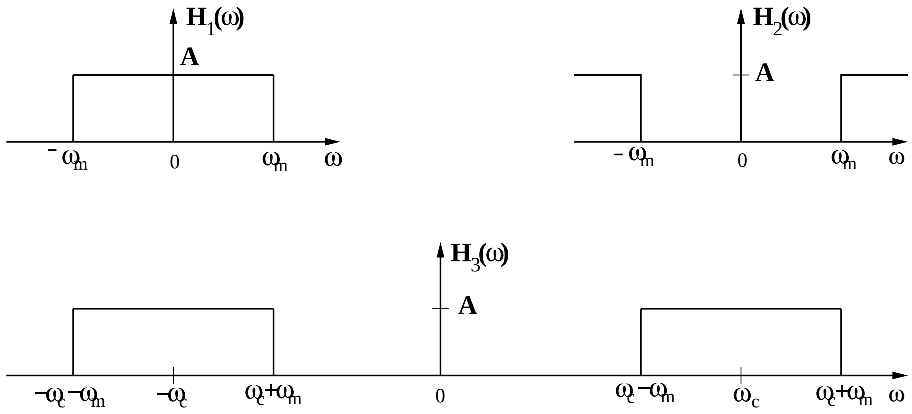

Figura 3: Funções a serem representadas pelo degrau unitário.

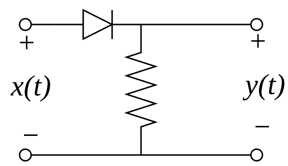

Figura 4: Circuito retificador de meia-onda (9ª Questão).

10. Determine o módulo e a fase (em graus) do sétimo termo (F_7) da Série Exponencial de Fourier da função $g(t) = f(t - \pi/2)$, sendo $f(t)$ a função ilustrada na Figura 5.

11. Determine os coeficientes a_6 e a_7 da Série Trigonométrica de Fourier do sinal

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n g(t - 4n),$$

em que $g(t)$ é dado por

$$g(t) = \frac{1}{2}\, t\, [u(t) - u(t-2)].$$

12. Determine os coeficientes F_6 e F_7 da série Exponencial de Fourier do sinal

$$x(t) = A|\text{sen}(2\pi t/T_0)|.$$

13. Seja $x(t)$ um sinal periódico com período fundamental T e F_n os coeficientes de sua respectiva série exponencial de Fourier. Dertermine uma fórmula para os coeficientes da série exponencial de Fourier do sinal $y(t) = x(t - t_0) - x(t + t_0)$ em termos dos coeficientes F_n. O que acontece quando $t_0 = T/2$. Explique esse resultado.

14. Calcule os coeficientes (a_0, a_n e b_n) da série de Fourier do sinal da Figura 6.

15. Dado o sinal $x(t) = At\,[u(t) - u(t - T)]$, determine os coeficientes da série trigonométrica de fourier do sinal

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT).$$

16. Mostre a transformada de uma função periódica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

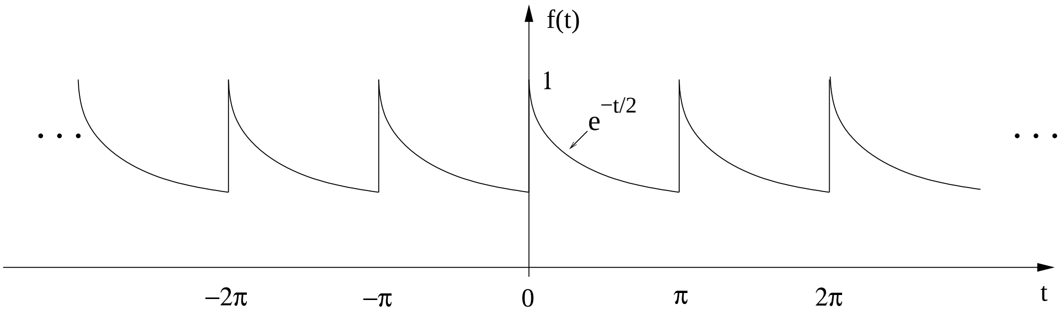

Figura 5: Sinal para determinação do sétimo termo da Série de Fourier.

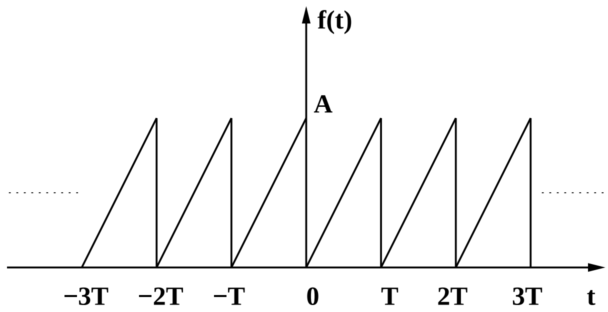

Figura 6: Sinal "dente-de-serra".

é

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

Use esse resultado para determinar a transformada de Fourier de $\mathrm{sen}(\omega_0 t)$.

17. Mostre que a transformada de Fourier do sinal $f(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$ é dada por

$$F(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}.$$

18. Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}. \\ 1, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

   (a) Use a propriedade da integração no tempo e a transformada de Fourier da função porta para encontrar uma fórmula fechada para $X(\omega)$;

   (b) Qual é a transformada de Fourier de $g(t) = x(t) - \frac{1}{2}$?

19. Considere o seguinte par de transformadas de Fourier:

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

   (a) Use a propriedade da diferenciação em frequência da transformada de Fourier para calcular a transformada de $te^{-|t|}$.

   (b) Use o resultado do item anterior conjuntamente com a propriedade da simetria para determinar a transformada de Fourier de

$$\frac{4t}{(1 + t^2)^2}.$$

20. Considere um sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}\delta(t).$$

Determine a resposta desse sistema à entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$ usando:

(a) Convolução no domínio do tempo;

(b) Teorema da convolução.

21. Calcule o módulo e a fase de $G(7)$, sabendo que $G(\omega)$ é a transformada de Fourier do sinal

$$g(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)u(t).$$

22. Usando a propriedade da integração no tempo, mostre que a transformada de Fourier do sinal $f(t)$ ilustrado na Figura 7 é $F(\omega) = 8\mathrm{sinc}(4\omega) - 4\mathrm{sinc}(2\omega)$, em que $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$.

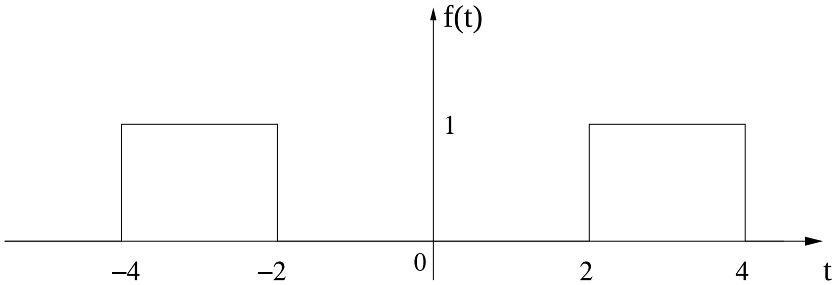

Figura 7: Sinal para determinação da transformada de Fourier.

23. Determine $g(7)$, sabendo que $g(t)$ é a transformada inversa de Fourier da função

$$G(\omega) = \begin{cases} j, & -2 \leq \omega < 0, \\ -j, & 0 \leq \omega \leq 2. \end{cases}$$

24. Determine a transformada inversa de Fourier do sinal $G(\omega)$ ilustrado na Figura 8.

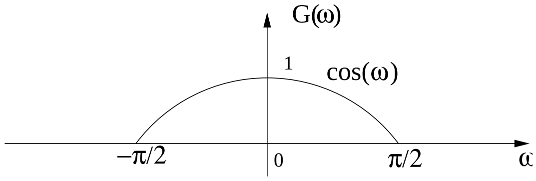

Figura 8: Sinal para determinação da transformada inversa de Fourier.

25. Os gráficos de módulo e fase do espectro $G(\omega)$ estão ilustrados na Figura 9. Determine a transformada inversa de Fourier desse sinal. Esboce o gráfico de $g(t)$.

26. Use o resultado da questão anterior para determinar a frequência de Nyquist, em kHz, dos sinais

$$f(t) = \frac{\mathrm{sen}(At) + \mathrm{sen}(Bt)}{\pi t} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{\mathrm{sen}(At) \cdot \mathrm{sen}(Bt)}{\pi^2 t^2},$$

em que $A = 4\pi \times 10^3$ rad/s e $B = 8\pi \times 10^3$ rad/s.

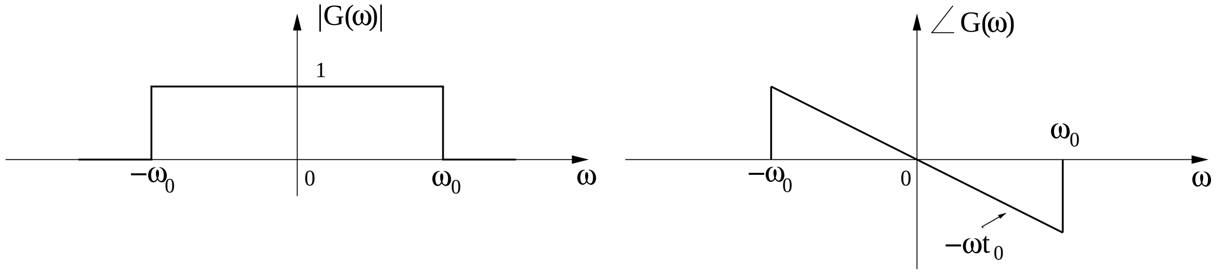

Figura 9: Sinal para determinação da transformada inversa de Fourier.

27. Cabos elétricos de linhas de transmissão estão sujeitos a vibrar sob efeito do vento. Estas vibrações podem alcançar algumas dezenas de Hertz. Um sistema projetado para monitorar, com boa precisão, este fenômeno capta um sinal elétrico analógico, proporcional à aceleração instantânea do cabo e com as seguintes características:
- faixa de frequência: 0 a 100 Hz
- excursão em amplitude: -10 V a +10 V
Este sinal é digitalizado com uma resolução de 50 mV e transmitido para uma central de processamento, onde é analisado.

    Do ponto de vista teórico, qual é a mínima taxa de transmissão destes dados digitalizados, em bits/s?[Fonte: Enade–2005]

    (a) 200 (b) 800 (c) 1400 (d) 1600 (e) 1800

28. Um concerto de um famoso pianista, com duração de 1 hora, foi digitalizado e armazenado em um site de músicas clássicas. A faixa de áudio considerada para digitalização foi de 0 a 10 kHz, utilizando como taxa de amostragem 10 vezes a frequência de Nyquist e amplitude quantizada em 512 níveis. Para realizar transferências de dados deste site, o computador utilizado consegue manter uma taxa constante de 4 Mbits/s. Com base nas informações acima, o tempo estimado, em segundos, para a completa transferência do arquivo para esse computador é [Fonte: Enade 2008]

    (a) 1.620 (b) 1.000 (c) 810 (d) 720 (e) 405

29. Um sistema de gravação em CD (*Compact Disc*) visa codificar sinais com frequência de até 22,05 kHz utilizando um conversor analógico-digital (A/D) de 16 bits. Determine o que se pede:

    (a) A taxa de amostragem para não haver perda de informação.
    (b) Aos bits codificados são adicionados bits para correção de erros, bits de sincronismo e bits de controle. Esses bits adicionais representam uma sobrecarga (*overhead*) de 100%, *i.e.*, para cada bit gerado no conversor A/D, 1 bit de sobrecarga é adicionado. Determine a taxa de bits do sistema de gravação em CD.
    (c) Suponha que o CD possa armazenar 1 hora de música e determine o número de bits gravados no CD.
    (d) Uma comparação pode ser feita considerando que um bom dicionário contém 1500 páginas, 2 colunas por página, 100 linhas por coluna, 7 palavras por linha, 6 letras por palavra e 6 bits por letra. Usando o resultado do item anterior, estime a quantidade de dicionários que podem ser armazenados em um CD.

30. Um sinal de vídeo apresenta frequência máxima igual a 6 MHz e deve ser amostrado à taxa de Nyquist para posterior codificação binária, usando 256 níveis (ou seja, oito bits por palavra-código) de quantização. Qual a frequência de amostragem? Qual a taxa de transmissão (em megabits por segundo, Mbps) do sinal digital?

31. Considere uma variável aleatória X uniformemente distribuída entre 0 e 1 com probabilidade 1/4, assumindo o valor 1 com probabilidade 1/4 e uniformemente distribuída entre 1 e 2 com probabilidade 1/2. Determine a função cumulativa de probabilidade (FCP) de X.

32. Considere uma variável aleatória definida pela seguinte função densidade de probabilidade (fdp) dada por
$$p_X(x) = ae^{-b|x|}, \qquad -\infty < x < \infty,$$
na qual a e b são constantes.

    (a) Determine a relação entre a e b de modo que $p_X(x)$ represente uma fdp.
    (b) Determine a função cumulativa de probabilidade $P_X(x)$ correspondente.
    (c) Calcule a probabilidade da variável aleatória estar entre 1 e 2.

33. Considere um sinal aleatório cuja amplitude é modelada pela seguinte função densidade de probabilidade
$$p_X(x) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|}.$$
Determine o que se pede:

    (a) A função cumulativa de probabilidade da amplitude do sinal aleatório;
    (b) A potência e desvio-padrão do sinal;
    (c) Prob($X > 5$) para $\alpha = 1$.

34. Mostre que a função
$$p_X(x) = \frac{\text{sen}(x)}{2}[u(x) - u(x - \pi)]$$
pode representar uma função densidade de probabilidade (fdp) e calcule o valor médio e a potência da variável aleatória associada a essa fdp.

35. A variável aleatória X tem função densidade de probabilidade dada por
$$p_X(x) = A\delta(x + 2) + B\,x\,[u(x) - u(x - 3)],$$
em que A e B são constantes. Considerando que $E[X] = 0$ (média nula), determine o valor das constantes A e B.

36. Calcule a probabilidade de que o sinal $X(t)$, com função densidade de probabilidade $p_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x + 1) + \frac{1}{2}e^{-x}u(x)$ não exceda o valor $\frac{1}{2}$.

37. Determine a média e potência total da variável aleatória X cuja função densidade de probabilidade é dada por
$$p_X(x) = \frac{1}{2}\,\delta(x + 2) + K \cdot [u(x + 1) - u(x - 3)],$$
em que K é uma constante.

38. A distribuição de Cauchy apresenta a seguinte função densidade de probabilidade
$$p_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$
Determine o valor médio de X.

39. A variável aleatória X tem função densidade de probabilidade dada por
$$p_X(x) = A[u(x + 4) - u(x + 2)] + \left(\frac{1}{64}x - \frac{1}{32}\right)[u(x - 2) - u(x - 10)],$$
em que A é uma constante. Considerando que $E[X] = 0$ (média nula), determine o valor da constante A.

40. Determine a média e potência total da variável aleatória X cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$p_X(x) = (x/16 + K)[u(x+1) - u(x-3)],$$

em que K é uma constante.

41. Determine o valor da constante K para que a função

$$p_X(x) = K(x+1) \cdot [u(x+1) - u(x-3)],$$

represente uma função densidade de probabilidade. Determine o valor médio da variável aleatória X.

42. A digitalização de sinais pode ser dividida em três etapas básicas: amostragem, quantização e codificação. As etapas de amostragem e codificação não introduzem distorção significativa no processo de conversão analógico-digital (A/D). Por outro lado, o ruído decorrente da etapa de quantização afeta significativamente o desempenho da conversão A/D. Admitindo o processo de quantização uniforme, no qual o passo de quantização é único em toda faixa dinâmica do sinal de entrada, é usual supor que o ruído de quantização é uniformemente distribuído entre $-d/2$ e $d/2$, em que d é o passo do quantizador. Determine a média e a potência do ruído de quantização.

43. Em se tratando de comunicações móveis celulares em que o meio de propagação é o espaço-livre, os sinais transmitidos podem sofrer fortes atenuações. Esse fenômeno é chamado de desvanecimento. Na ausência de visada direta entre a antena transmissora e a antena receptora, o desvanecimento é usualmente modelado por meio de uma variável aleatória com distribuição de Rayleigh, cuja função densidade de probabilidade (fdp) é dada por

$$p_R(r) = re^{-r^2/K}u(r),$$

em que $u(\cdot)$ é a função degrau unitário e K é uma constante positiva. Determine:

(a) O valor da constante K;

(b) A potência total do processo estocástico associado a variável aleatória R.

44. A função geratriz de momentos ($P_X(\omega)$) é a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade ($p_X(x)$) de uma variável aleatória. Mostre que

$$E[X^n] = \frac{1}{(-j)^n} \left.\frac{\partial^n P_X(\omega)}{\partial \omega^n}\right|_{\omega=0}.$$

Use esse resultado para determinar a média e a variância de uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(-a, a)$.

45. A Figura 10 ilustra uma amostra do sinal binário aleatório $x(t)$. Para qualquer intervalo de tempo $(n-1)T < t - T_b < nT$, $x(t)$ assume um dos valores $+A$ ou $-A$. O atraso T_b é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre zero e T. Determine o que se pede:

(a) Mostre que a função de autocorrelação do sinal $x(t)$, $R_X(\tau) = E[x(t) \cdot x(t+\tau)]$, é dada por

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2\left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right], & |\tau| < T, \\ 0, & |\tau| > T; \end{cases}$$

(b) Calcule a potência total do sinal $x(t)$;

(c) Calcule a potência DC do sinal $x(t)$;

(d) Calcule a potência AC do sinal $x(t)$;

(e) Calcule e esboce a densidade espectral de potência de $x(t)$.

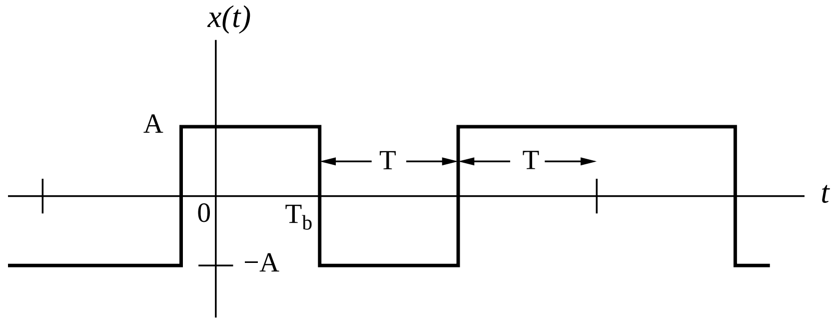

Figura 10: Sinal binário aleatório.

46. Determine o valor médio ($\bar{X}$), o valor eficaz (X_{rms}), a autocorrelação ($R_X(\tau)$), e a densidade espectral de potência ($S_X(\omega)$) do sinal aleatório senoidal $x(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$, em que θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre zero e 2π.

47. Considere o diagrama de blocos da Figura 11 em que um sinal $m(t)$ com densidade espectral de potência (DEP) dada por $S_m(\omega) = \beta[u(\omega+\alpha) - u(\omega-\alpha)]$ e $\alpha = 8000\pi$ é transmitido por um canal telefônico com função de transferência $H_c(\omega) = 10^{-1}/(j\omega+\alpha)$. O sinal transmitido também é afetado pelo ruído aditivo cuja DEP é dada por $S_n(\omega) = 10^{-14}$. Para compensar a distorção do canal, o filtro de recepção apresenta a seguinte função de transferência

$$H_d(\omega) = \left(\frac{j\omega+\alpha}{\alpha}\right)[u(\omega+\alpha) - u(\omega-\alpha)].$$

Qual deve ser o valor de β para garantir uma relação sinal-ruído mínima de 35 dB na saída do receptor?

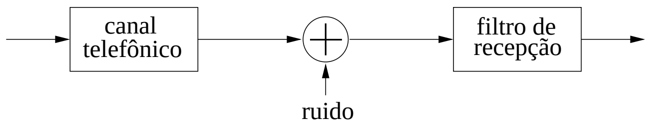

Figura 11: Diagrama de blocos de um canal telefônico sujeito ao ruído aditivo.