UFCG – Universidade Federal de Campina Grande
CEEI – Centro de Engenharia Elétrica e Informática
DEE – Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Princípios de Comunicações (2013.1)
Professor: Waslon Terllizzie Araújo Lopes
Aluno(a): Gabarito da Silva

85

# Primeira Avaliação

1ª Questão: (1,0 ponto) Dado o sinal $g(t)$ ilustrado na Figura 1. Esboce os gráficos dos seguintes sinais: $g(t-2)$, $g(-t+2)$, $g(-t/2-2)$, $g(2t+2)$ e $g(-t)/2$.

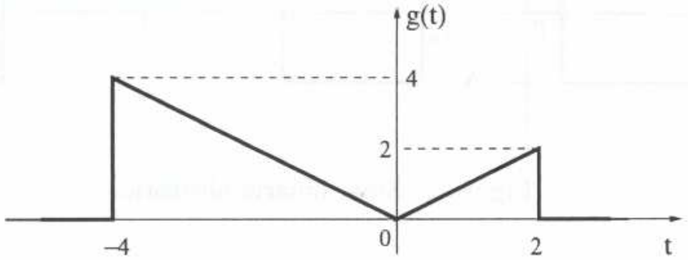



Figura 1: Sinal da Questão 1.

2ª Questão: (1,0 ponto) Se as duas metades de um período de um sinal periódico tem formato idêntico sendo diferenciadas apenas pelo fato de que uma metade é o negativo da outra, diz-se que o sinal periódico apresenta *simetria de meia-onda*. Assim, se o sinal periódico $f(t)$ com período $T_0$ satisfaz a condição de *simetria de meia-onda* tem-se

$$f\left(t-\frac{T_0}{2}\right)=-f(t).$$

(a) Mostre que neste caso os coeficientes da Série de Fourier das harmônicas de ordem par são nulos enquanto que os coeficientes de ordem ímpar são dados por

$$a_n=\frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad \text{e} \quad b_n=\frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)dt.$$

(b) Usando estes resultados, determine os coeficientes da Série Trigonométrica de Fourier do sinal

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n g(t-4n),$$

em que $g(t)$ é dado por

$$g(t)=\frac{1}{2}\,t\,[u(t)-u(t-2)].$$

3ª Questão: (1,0 ponto) Calcule o módulo e a fase de $G(3)$, sabendo que $G(\omega)$ é a transformada de Fourier do sinal

$$g(t)=e^{-2t}\cos(2\pi t)u(t).$$

4ª Questão: (2,0 pontos) O sinal $x(t)=A[u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)]$ é aplicado na entrada de um filtro cuja resposta ao impulso é dada por $h(t)=\delta(t+\tau/2)-\delta(t-\tau/2)$, gerando como saída o sinal $y(t)$. Esboce o gráfico do sinal $y(t)$ e calcule a sua transformada de Fourier.

5ª Questão: (2,0 pontos) Um sinal aleatório uniformemente distribuído entre -12 V e +12 V deve ser digitalizado atendendo a restrição que a relação sinal-ruído de quantização deve ser, no mínimo, igual a 40 dB. Quantos intervalos de quantização uniformemente espaçados são necessários? Quantos bits devem ser utilizados para codificar cada amostra?

6ª Questão: (2,0 pontos) A Figura 2 ilustra uma amostra do sinal binário aleatório $x(t)$. Para qualquer intervalo de tempo $(n-1)T < t - T_b < nT$, $x(t)$ assume um dos valores $+A$ ou $-A$ com probabilidade $3/4$ e $1/4$, respectivamente. O atraso $T_b$ é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre zero e $T$. Determine o que se pede:

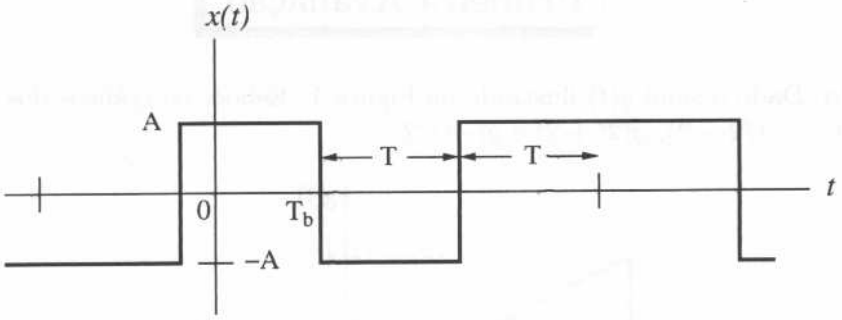



Figura 2: Sinal binário aleatório.

(a) Calcule a função de autocorrelação do sinal $x(t)$, $R_X(\tau) = E[x(t) \cdot x(t+\tau)]$;

(b) Calcule a potência total do sinal $x(t)$;

(c) Calcule a potência DC do sinal $x(t)$;

(d) Calcule a potência AC do sinal $x(t)$;

(e) Calcule e esboce a densidade espectral de potência de $x(t)$.

7ª Questão: (1,0 ponto) Considere o diagrama de blocos da Figura 3 em que um sinal $m(t)$ com densidade espectral de potência (DEP) dada por $S_m(\omega) = \beta[u(\omega+\alpha) - u(\omega-\alpha)]$ e $\alpha = 4000\pi$ é transmitido por um canal telefônico com função de transferência $H_c(\omega) = 10^{-1}/(j\omega + \alpha)$. O sinal transmitido também é afetado pelo ruído aditivo cuja DEP é dada por $S_n(\omega) = 10^{-12}$. Para compensar a distorção do canal, o filtro de recepção apresenta a seguinte função de transferência

$$H_d(\omega) = \left(\frac{j\omega + \alpha}{\alpha}\right)[u(\omega+\alpha) - u(\omega-\alpha)].$$

Qual deve ser o valor de $\beta$ para garantir uma relação sinal-ruído mínima de 35 dB na saída do receptor?

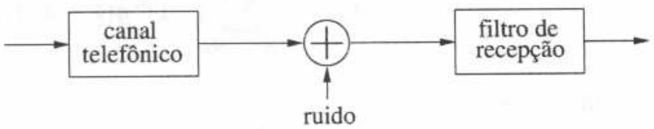
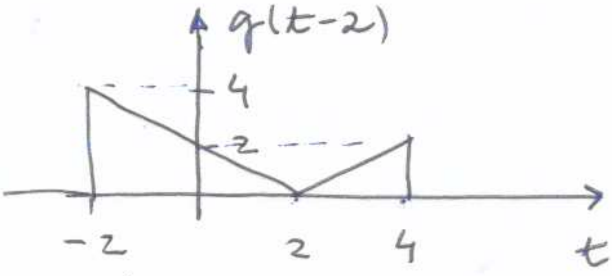


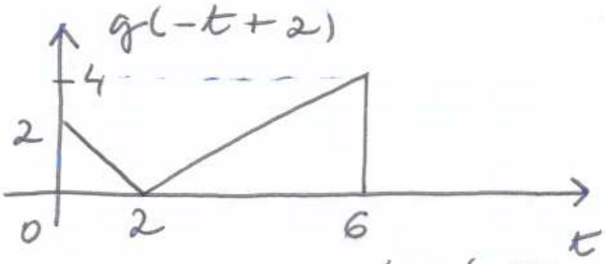

Figura 3: Diagrama de blocos de um canal telefônico sujeito ao ruído aditivo.

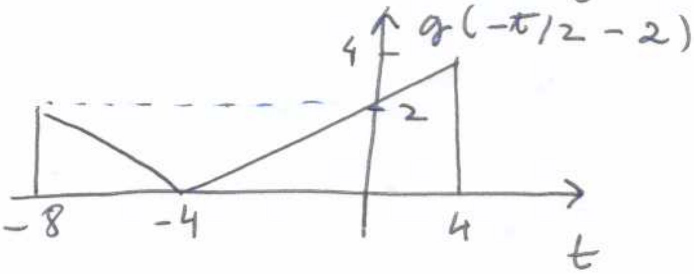
*Boa Prova!*
*W. T. A. Lopes*

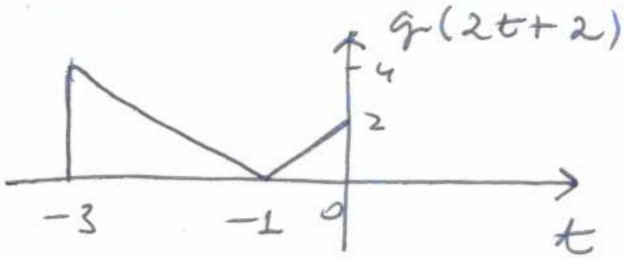
A

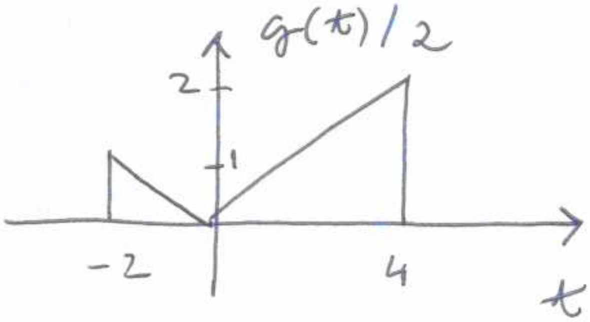
## 1ª questão



2ª questão

$\textcircled{B}$

a) $a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\cos(n w_0 t)\,dt$

$$= \frac{2}{T_0}\left[\underbrace{\int_{-T_0/2}^{0} f(t)\cos(n w_0 t)\,dt}_{*} + \int_0^{T_0/2} f(t)\cdot\cos(n w_0 t)\,dt\right]$$

$* \begin{cases} u = t + T_0/2 \\ du = dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^{T_0/2} f(u - T_0/2)\cos(n w_0 (u - T_0/2))\,du =$

$$= \int_0^{T_0/2} f(u - T_0/2)\left[\cos(n w_0 u)\cdot\cos(\underbrace{n w_0 T_0/2}_{n\pi}) + \text{sen}(n w_0 u)\cdot \text{sen}(\underbrace{n w_0 \tfrac{T_0}{2}}_{n\pi})\right]du$$

$$= \int_0^{T_0/2} f(u - T_0/2)\left[\cos(n w_0 u)\cdot\cos(n\pi) + \text{sen}(n w_0 u)\,\underbrace{\text{sen}(n\pi)}_{0}\right]du =$$

$$= \int_0^{T_0/2} f(u - T_0/2)\cdot\cos(n w_0 u)\cdot\cos(n\pi)\,du =$$

$u \to t$

$$= \int_0^{T_0/2} f(t - T_0/2)\cos(n w_0 t)\cos(n\pi)\,dt =$$

$$= \int_0^{T_0/2} [-f(t)]\cdot\cos(n w_0 t)\cdot\cos(n\pi)\,dt$$

e

Assim

$$a_n = \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2} -f(t)\cos(n\omega_0 t)\cos(n\pi)\,dt + \int_0^{T_0/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

Como $\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt, & p/\ n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

De forma análoga,

$$\operatorname{sen}(n\omega_0(u - T_0/2)) = \operatorname{sen}(n\omega_0 u)\cos(n\omega_0 T_0/2) - \operatorname{sen}(n\omega_0 T_0/2)\cos(n\omega_0 u)$$

$$= \operatorname{sen}(n\omega_0 u)\cdot\cos(n\pi) - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(n\pi)}\cdot\cos(n\omega_0 u)$$

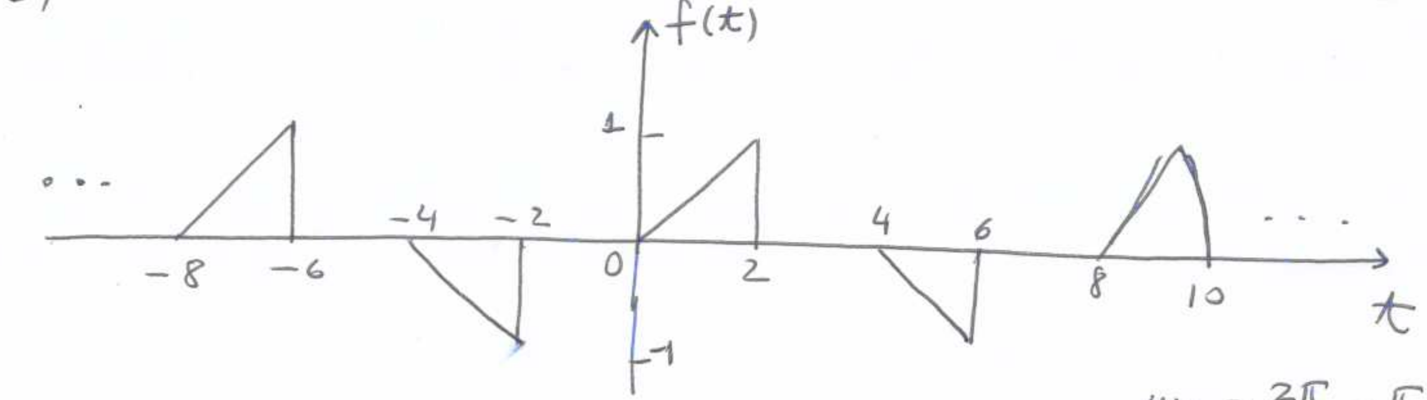
Logo

$$b_n = \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2} -f(t)\cdot\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\cos(n\pi)\,dt + \int_0^{T_0/2} f(t)\cdot\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

o que leva a

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

b) (D)




$\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$a_n = 0$ , $n$ par

p/ $n$ ímpar

$$a_n = \frac{4}{8}\int_0^4 f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 \frac{1}{2}\,t\cos(n\omega_0 t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\int_0^2 t\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right)dt$$

$$* \int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\left(\cos(ax) + ax\sin ax\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(n\pi/4)^2}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}t\right) + n\frac{\pi}{4}t\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{4}t\right)\right]\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^2}\left[\underbrace{\cos(n\pi/2)}_{=0\ (n\ \text{ímpar})} + \frac{n\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - 0\right]$$

Assim

$$a_n = \begin{cases} 0\ , & p/\ n\ \text{par} \\ \frac{4}{(n\pi)^2}\left[n\pi/2 - 1\right]\ , & p/\ n = 1, 5, 9, 13 \ldots \\ \frac{-4}{(n\pi)^2}\left[n\pi/2 + 1\right]\ , & p/\ n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

Ⓔ

$$b_n = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{4}{8}\int_0^{2} \frac{1}{2}\, t\,\text{sen}(n\,\pi/4\, t)\,dt$$

$$* \int x\,\text{sen}\,ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left(\sin(ax) - a\,x\cos(ax)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n\pi/4)^2}\cdot\left(\text{sen}\,(n\pi/4\, t) - \frac{n\pi}{4}\, t\cos\left(n\frac{\pi}{4} t\right)\right)\right]\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n\pi/4)^2}\cdot\left[\text{sen}\,(n\pi/2) - \frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2)\right]\right]$$

$= 0$, ($n$ ímpar)

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{(n\pi)^2}\,\text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), & n \text{ ímpar} \\[2ex] 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

# 3ª questão

F

(I) $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{a+jw}$

(II) $f(t) \cdot \cos(w_0 t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2} F(w \pm w_0)$

Usando I e II, tem-se

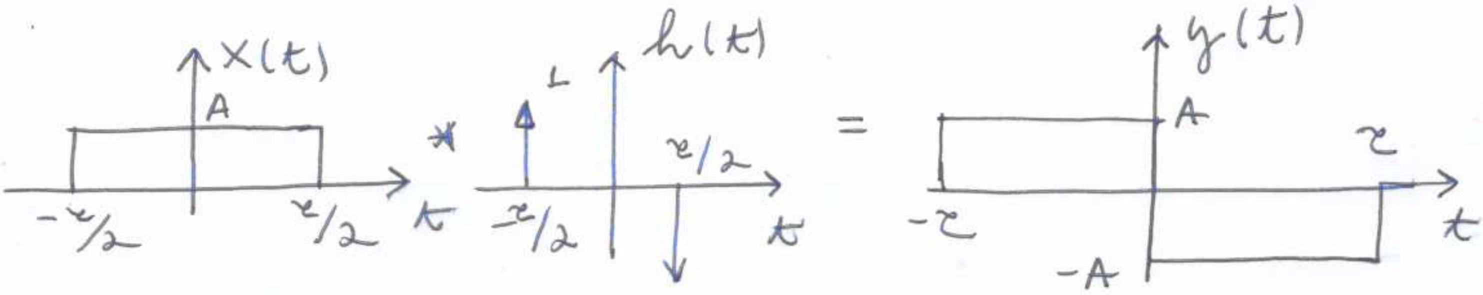
$$G(w) = 1/2 \cdot \frac{1}{2+j(w \pm 2\pi)}$$

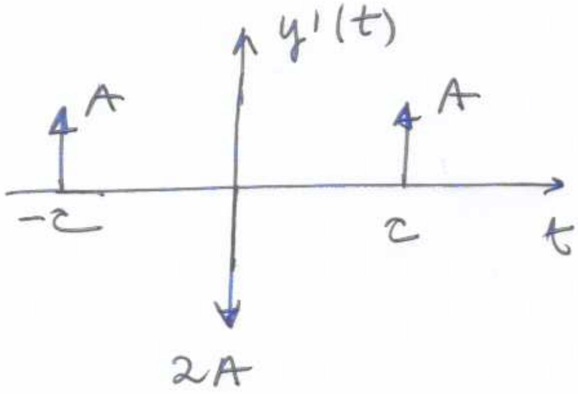
Logo

$$G(3) = 1/2 \cdot \left[ \frac{1}{2+j(3+2\pi)} + \frac{1}{2+j(3-2\pi)} \right]$$

$$\boxed{G(3) = 0{,}0988 \angle 37{,}12^\circ}$$

## 4ª questão



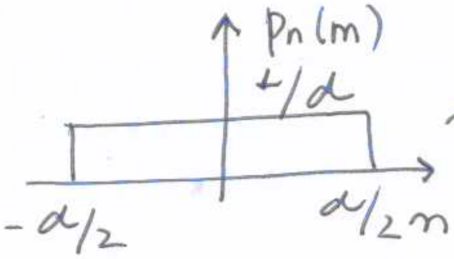

$$\mathcal{F}\{y'(t)\} = Ae^{j\omega\tau} - 2A + Ae^{-j\omega\tau}$$

$$= 2A(1+\cos(\omega\tau))$$

Assim

$$\boxed{Y(\omega) = \frac{2A}{j\omega}\left(1+\cos(\omega\tau)\right)}$$

# 5ª questão




$$P_N = \frac{d^2}{12}$$

$$P_S = \frac{24^2}{12} = 48\,W \quad \text{(sinal aleatório)}$$

$$SQNR = 10\log\frac{P_S}{P_N} = 40$$

$$10\log\frac{48}{d^2/12} = 40$$

$$\frac{48}{d^2/12} = 10^4$$

$$d = \sqrt{\frac{48.12}{10^4}} = 0{,}24\,V$$

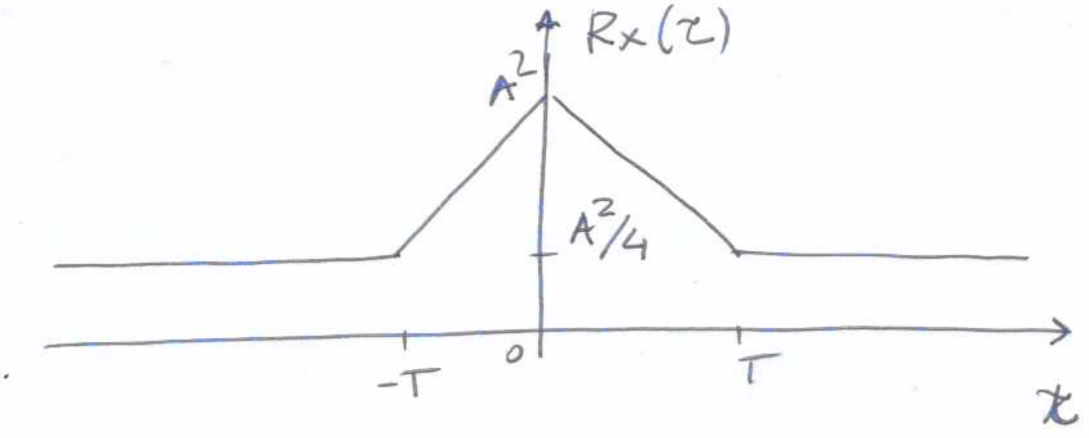
$$L = \frac{12-(-12)}{0{,}24} = \boxed{100 \text{ níveis}}$$

$$n = \lceil \log_2 L \rceil = \lceil 6{,}64 \rceil = \boxed{7 \text{ bits}}$$

6ª questão

I

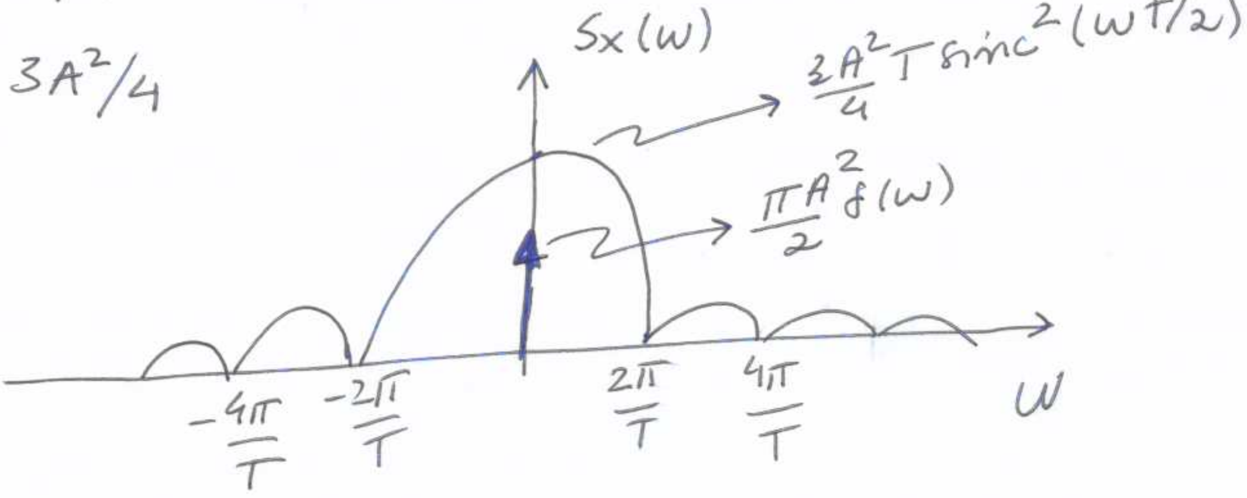
a)




b) $A^2$

c) $A^2/4$

d) $3A^2/4$



7ª questão

(J)

$$P_N = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} 10^{-12} \cdot \frac{w^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \, dw$$

$$= \frac{10^{-12}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot 2 \cdot \left( \frac{w^3}{3} + \alpha^2 \cdot w \right)_0^{\alpha}$$

$$= \frac{10^{-12}}{\pi \alpha^2} \cdot \frac{4}{3} \alpha^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{10^{-12}}{\pi} \alpha$$

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \beta \cdot \frac{10^{-2}}{w^2 + \alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2 + w^2}{\alpha^2} \, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\beta \cdot 10^{-2}}{\alpha^2} \cdot 2\alpha = \frac{\beta \cdot 10^{-2}}{\alpha \cdot \pi}$$

$$10 \log \frac{P_S}{P_N} = 35$$

$$\frac{P_S}{P_N} = 10^{3,5}$$

$$\frac{\dfrac{\beta \cdot 10^{-2}}{\alpha \cancel{\pi}}}{\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{10^{-12}}{\cancel{\pi}} \cdot \alpha} = 10^{3,5} \Longrightarrow \beta = \frac{10^{3,5} \cdot 4 \cdot 10^{-12} \alpha^2}{3 \cdot 10^{-2}}$$

$$\boxed{\beta = 16,64}$$