UFCG – Universidade Federal de Campina Grande
CEEI – Centro de Engenharia Elétrica e Informática
DEE – Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Princípios de Comunicações
Professor: Waslon Terllizzie Araújo Lopes

2ª Lista de Exercícios: Semestre 2012.1

1. Considere uma variável aleatória X uniformemente distribuída entre 0 e 1 com probabilidade 1/4, assumindo o valor 1 com probabilidade 1/4 e uniformemente distribuída entre 1 e 2 com probabilidade 1/2. Determine a função cumulativa de probabilidade (FCP) de X.

2. Considere uma variável aleatória definida pela seguinte função densidade de probabilidade (fdp) dada por
$$p_X(x) = ae^{-b|x|}, \qquad -\infty < x < \infty,$$
na qual a e b são constantes.
   (a) Determine a relação entre a e b de modo que $p_X(x)$ represente uma fdp.
   (b) Determine a função cumulativa de probabilidade $P_X(x)$ correspondente.
   (c) Calcule a probabilidade da variável aleatória estar entre 1 e 2.

3. Mostre que a função
$$p_X(x) = \frac{\sin(x)}{2}[u(x) - u(x-\pi)]$$
pode representar uma função densidade de probabilidade (fdp) e calcule o valor médio e a potência da variável aleatória associada a essa fdp.

4. A variável aleatória X tem função densidade de probabilidade dada por
$$p_X(x) = A\delta(x+2) + B\,x\,[u(x) - u(x-3)],$$
em que A e B são constantes. Considerando que $E[X] = 0$ (média nula), determine o valor das constantes A e B.

5. Calcule a probabilidade de que o sinal $X(t)$, com função densidade de probabilidade $p_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}e^{-x}u(x)$ não exceda o valor $\frac{1}{2}$.

6. Determine a média e potência total da variável aleatória X cuja função densidade de probabilidade é dada por
$$p_X(x) = \frac{1}{2}\,\delta(x+2) + K \cdot [u(x+1) - u(x-3)],$$
em que K é uma constante.

7. A distribuição de Cauchy apresenta a seguinte função densidade de probabilidade
$$p_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$
Determine o valor médio de X.

8. A variável aleatória X tem função densidade de probabilidade dada por
$$p_X(x) = A[u(x+4) - u(x+2)] + \left(\frac{1}{64}x - \frac{1}{32}\right)[u(x-2) - u(x-10)],$$
em que A é uma constante. Considerando que $E[X] = 0$ (média nula), determine o valor da constante A.

9. Determine a média e potência total da variável aleatória X cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$p_X(x) = (x/16 + K)[u(x+1) - u(x-3)],$$

em que K é uma constante.

10. Determine o valor da constante K para que a função

$$p_X(x) = K(x+1) \cdot [u(x+1) - u(x-3)],$$

represente uma função densidade de probabilidade. Determine o valor médio da variável aleatória X.

11. A digitalização de sinais pode ser dividida em três etapas básicas: amostragem, quantização e codificação. As etapas de amostragem e codificação não introduzem distorção significativa no processo de conversão analógico-digital (A/D). Por outro lado, o ruído decorrente da etapa de quantização afeta significativamente o desempenho da conversão A/D. Admitindo o processo de quantização uniforme, no qual o passo de quantização é único em toda faixa dinâmica do sinal de entrada, é usual supor que o ruído de quantização é uniformemente distribuído entre $-d/2$ e $d/2$, em que d é o passo do quantizador. Determine a média e a potência do ruído de quantização.

12. Em se tratando de comunicações móveis celulares em que o meio de propagação é o espaço-livre, os sinais transmitidos podem sofrer fortes atenuações. Esse fenômeno é chamado de desvanecimento. Na ausência de visada direta entre a antena transmissora e a antena receptora, o desvanecimento é usualmente modelado por meio de uma variável aleatória com distribuição de Rayleigh, cuja função densidade de probabilidade (fdp) é dada por

$$p_R(r) = re^{-r^2/K}u(r),$$

em que $u(\cdot)$ é a função degrau unitário e K é uma constante positiva. Determine:

    (a) O valor da constante K;
    (b) A potência total do processo estocástico associado a variável aleatória R.

13. A função geratriz de momentos ($P_X(\omega)$) é a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade ($p_X(x)$) de uma variável aleatória. Mostre que

$$E[X^n] = \frac{1}{(-j)^n} \left. \frac{\partial^n P_X(\omega)}{\partial \omega^n} \right|_{\omega=0}.$$

Use esse resultado para determinar a média e a variância de uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(-a, a)$.

14. A Figura 1 ilustra uma amostra do sinal binário aleatório $x(t)$. Para qualquer intervalo de tempo $(n-1)T < t - T_b < nT$, $x(t)$ assume um dos valores $+A$ ou $-A$. O atraso T_b é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre zero e T. Determine o que se pede:

    (a) Mostre que a função de autocorrelação do sinal $x(t)$, $R_X(\tau) = E[x(t) \cdot x(t+\tau)]$, é dada por

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 \left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right], & |\tau| < T, \\ 0, & |\tau| > T; \end{cases}$$

    (b) Calcule a potência total do sinal $x(t)$;
    (c) Calcule a potência DC do sinal $x(t)$;
    (d) Calcule a potência AC do sinal $x(t)$;
    (e) Calcule e esboce a densidade espectral de potência de $x(t)$.

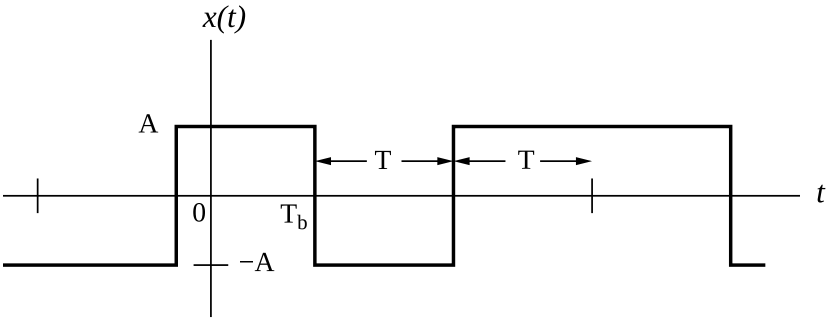

Figura 1: Sinal binário aleatório.

15. Determine o valor médio ($\bar{X}$), o valor eficaz (X_{rms}), a autocorrelação ($R_X(\tau)$), e a densidade espectral de potência ($S_X(\omega)$) do sinal aleatório senoidal $x(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$, em que θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre zero e 2π.

16. Considere o diagrama de blocos da Figura 2 em que um sinal $m(t)$ com densidade espectral de potência (DEP) dada por $S_m(\omega) = \beta[u(\omega+\alpha) - u(\omega-\alpha)]$ e $\alpha = 8000\pi$ é transmitido por um canal telefônico com função de transferência $H_c(\omega) = 10^{-1}/(j\omega+\alpha)$. O sinal transmitido também é afetado pelo ruído aditivo cuja DEP é dada por $S_n(\omega) = 10^{-14}$. Para compensar a distorção do canal, o filtro de recepção apresenta a seguinte função de transferência

$$H_d(\omega) = \left(\frac{j\omega+\alpha}{\alpha}\right)[u(\omega+\alpha) - u(\omega-\alpha)].$$

Qual deve ser o valor de β para garantir uma relação sinal-ruído mínima de 35 dB na saída do receptor?

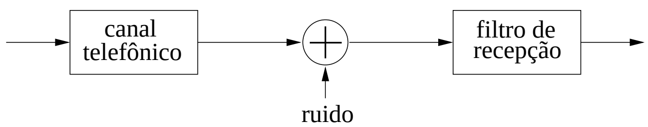

Figura 2: Diagrama de blocos de um canal telefônico sujeito ao ruído aditivo.