UFCG – Universidade Federal de Campina Grande
CEEI – Centro de Engenharia Elétrica e Informática
DEE – Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Princípios de Comunicações (2012.1)
Professor: Waslon Terllizzie Araújo Lopes
Aluno(a): ______________________________

Primeira Avaliação

1ª Questão: (2,0 pontos) Um sinal real $g(t)$ pode ser aproximado em termos de outro sinal real $x(t)$ num intervalo $[t_1, t_2]$ pela seguinte expresssão:

$$g(t) \simeq c\,x(t), \qquad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Nesse caso, o erro na aproximação $e(t)$ é dado por

$$e(t) = \begin{cases} g(t) - c\,x(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que a energia do erro é minimizada quando

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt} = \frac{1}{E_x}\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt.$$

(b) Use o resultado anterior para determinar o valor da constante c quando o sinal

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ -1, & \pi \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

é aproximado em termos de $\text{sen}(t)$, *i.e.*, $g(t) \simeq c\,\text{sen}(t)$.

2ª Questão: (2,0 pontos) Considerando que a tensão $x(t) = \text{sen}(\pi t)$ é aplicada à entrada do circuito retificador da Figura 1, determine os coeficientes (a_0, a_n e b_n) da Série Trigonométrica de Fourier da tensão de saída $y(t)$.

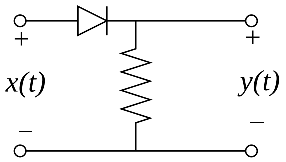


Figura 1: Circuito retificador de meia-onda (2ª Questão).

3ª Questão: (2,0 pontos) Considere o seguinte par de transformadas de Fourier:

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}.$$

(a) Use a propriedade da diferenciação em frequência da transformada de Fourier para calcular a transformada de $te^{-|t|}$.

(b) Use o resultado do item anterior conjuntamente com a propriedade da simetria para determinar a transformada de Fourier de

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

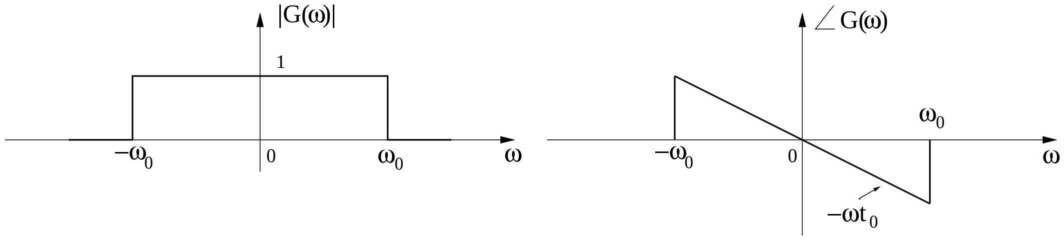


Figura 2: Sinal para determinação da transformada inversa de Fourier.

4ª Questão: (2,0 pontos) Os gráficos de módulo e fase do espectro $G(\omega)$ estão ilustrados na Figura 2. Determine a transformada inversa de Fourier desse sinal. Esboce o gráfico de $g(t)$ considerando $\omega_0 = \pi$ rad/s e $t_0 = 1$ s.

5ª Questão: (2,0 pontos) Um sistema de gravação em CD (*Compact Disc*) visa codificar sinais com frequência de até 22,05 kHz utilizando um conversor analógico-digital (A/D) de 16 bits. Determine o que se pede:

(a) A taxa de amostragem para não haver perda de informação.

(b) Aos bits codificados são adicionados bits para correção de erros, bits de sincronismo e bits de controle. Esses bits adicionais representam uma sobrecarga (*overhead*) de 100%, *i.e.*, para cada bit gerado no conversor A/D, 1 bit de sobrecarga é adicionado. Determine a taxa de bits do sistema de gravação em CD.

(c) Suponha que o CD possa armazenar 1 hora de música e determine o número de bits gravados no CD.

(d) Uma comparação pode ser feita considerando que um bom dicionário contém 1500 páginas, 2 colunas por página, 100 linhas por coluna, 7 palavras por linha, 6 letras por palavra e 6 bits por letra. Usando o resultado do item anterior, estime a quantidade de dicionários que podem ser armazenados em um CD.

Boa Prova!
W. T. A. Lopes

Gabarito (1ª Avaliação) Ⓐ

a) Energia do Erro

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - c\,x(t)]^2\,dt$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial c} = \int_{t_1}^{t_2} [\,2 \cdot (g(t) - c\,x(t)) \cdot (-x(t))\,]\,dt$$

$$= 2 \cdot \int_{t_1}^{t_2} [-x(t)\,g(t) + c\,x^2(t)]\,dt = 0$$

$$c \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot g(t)\,dt$$

Logo,

$$\boxed{c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot x(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt} = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t) \cdot x(t)\,dt}$$

b) $$\int_0^{2\pi} g(t) \cdot x(t)\,dt = \int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\operatorname{sen}(t)\,dt =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$$

$$E_x = \int_0^{2\pi} x^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\,dt =$$

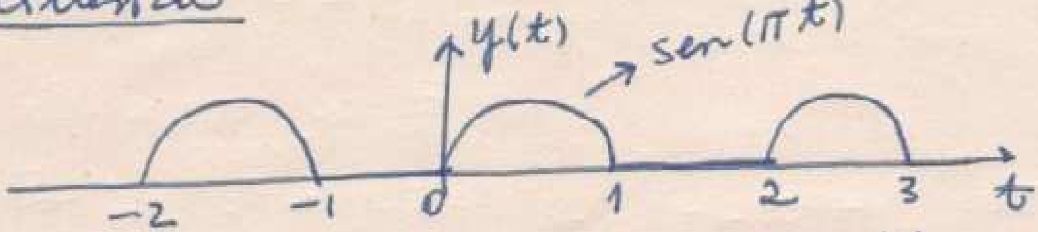
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Assim,

$$\boxed{c = \frac{4}{\pi}}$$

2ª Questão

(B)



$T = 2$
$\omega_0 = \pi$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \text{sen}(\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\cos 0 - \cos\pi\right]$$

$$\boxed{a_0 = 1/\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\cdot\int_0^1 \text{sen}(\pi t)\cos(n\pi t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\text{sen}((1+n)\pi t) + \text{sen}((1-n)\pi t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-\cos((1+n)\pi t)\Big|_0^1}{(1+n)\pi} + \frac{-\cos((1-n)\pi t)\Big|_0^1}{(1-n)\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-\cos((1+n)\pi)}{(1+n)\pi} + \frac{1-\cos((1-n)\pi)}{(1-n)\pi}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar} \\ \dfrac{2}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ par}\end{cases}}$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 \text{sen}(\pi t)\cdot\text{sen}(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 [-\cos((1+n)\pi t) + \cos((1-n)\pi t)]\,dt$$

$$= 1/2\left[\frac{-\text{sen}((1+n)\pi t)\Big|_0^1}{(1+n)\pi} + \frac{\text{sen}((1-n)\pi t)\Big|_0^1}{(1-n)\pi}\right]$$

$$= 1/2\left[-\frac{\text{sen}((1+n)\pi)}{(1+n)\pi} + \frac{\text{sen}((1-n)\pi)}{(1-n)\pi}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \begin{cases} 1/2, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2\end{cases}}$$

3ª questão

a) Diferenciação em frequência

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-jwt} dt$$

$$\frac{\partial F(w)}{\partial w} = \int_{-\infty}^{+\infty} [-jt f(t)] \cdot e^{-jwt} dt$$

logo,

$$-jt f(t) \leftrightarrow \frac{\partial F(w)}{\partial w}$$

$$\boxed{t f(t) \longleftrightarrow j \frac{dF(w)}{dw}}$$

Assim

$$te^{|t|} \leftrightarrow j \frac{d}{dw}\left[\frac{2}{1+w^2}\right] = j \frac{-4w}{(1+w^2)^2}$$

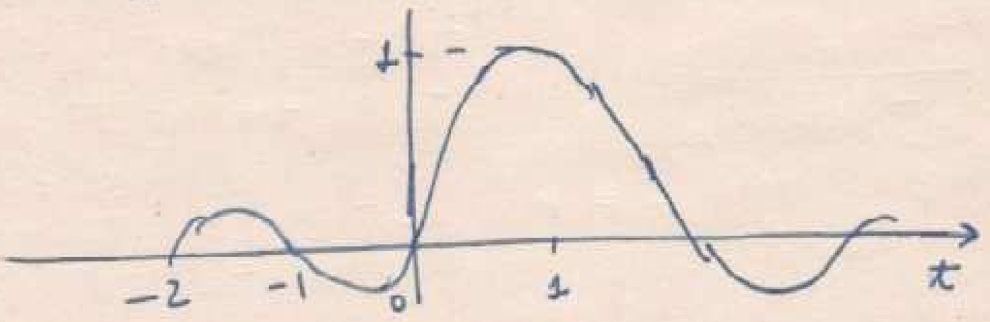
b) Simetria $\begin{cases} f(t) \leftrightarrow F(w) \\ F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w) \end{cases}$

$$\boxed{\frac{4t}{(1+t^2)^2} \longleftrightarrow (-j) \cdot 2\pi \cdot w e^{-|w|}}$$

4ª questão

Resolvida em sala de aula

$$f(t) = \frac{w_0}{\pi} \operatorname{sinc}(w_0(t-t_0)) = \operatorname{sinc}(\pi(t-1))$$



D

5ª questão

a) $f_A = 2 \cdot 22{,}05 = 44{,}1 \text{ kHz}$

b) $R = 44{,}1 \cdot 10^3 \cdot (16+16) = 1{,}4112 \text{ M}\frac{\text{bits}}{\text{s}}$

c) Quant. de dados $= 1{,}4112 \cdot 10^6 \cdot \underbrace{3.600}_{1 \text{ hora}}$

$D = 5{,}0803 \cdot 10^9$ bits

d) $\dfrac{5{,}0803 \cdot 10^9}{(1500 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6) \cdot 2} = 33{,}59 \approx 33$ dicionários.

overhead